Gewöhnliche Differentialgleichung: NWI
-Sophiane Yahiatene-

Aufgabe 3.1 Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ mit:
$\exists \alpha \in (0,1) : d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y) \forall x, y \in X$

Es existiert genau einen Fixpunkt für f, d.h. $\exists!\ x \in X : f(x) = x$

Beweis. Sei $x_0 \in X$ beliebig. So gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$d(f^{n+1}(x_0), f^n(x_0)) \leq \alpha d(f^n(x_0), f^{n-1}(x_0)) \leq \alpha^2 d(f^{n-1}(x_0), f^{n-2}(x_0)) \leq ... \leq \alpha^n d(f(x_0), x_0)$$

(Warum kann man jetzt noch nicht sagen, dass $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist?)

Somit gilt für alle $m, n \in \mathbb{N} : n > m$

$$\begin{aligned} d(f^n(x_0), f^m(x_0)) \leq & d(f^n(x_0), f^{n-1}(x_0)) + d(f^{n-1}(x_0), f^m(x_0)) \\ & ... \\ \leq & \sum_{k=m+1}^{n} d(f^k(x_0), f^{k-1}(x_0)) \\ \leq & \sum_{k=m+1}^{n} \alpha^{k-1} d(f(x_0), x_0) \\ = & d(f(x_0), x_0) \sum_{k=m+1}^{n} \alpha^{k-1} \longrightarrow 0,\ n, m \to \infty \end{aligned}$$

Also ist die Folge $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X. Da X vollständig ist

$$\exists x := lim_{n\to\infty} f^n(x_0) \in X$$

und x ist ein Fixpunkt, denn es gilt offensichtlich

$$f(x) = f(lim_{n\to\infty} f^n(x_0)) = lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) = x.$$

Nun zur Eindeutigkeit:
Sei $y \in X : f(y) = y$ ein weiterer Fixpunkt, so gilt:

$$\begin{aligned} & d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y) \leq d(x,y) \\ \Rightarrow & (1-\alpha) d(x,y) = 0 \Rightarrow d(x,y) = 0 \\ \Rightarrow & x = y \end{aligned}$$

$\square$

Gilt der Satz auch für $\alpha = 0$?

Aufgabe 3.2 Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in E := \{\gamma : [a,b] \to U |\ \gamma \text{ stetig}\}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$.
Es existiert $d(\gamma_1, \gamma_2) = \max_{t\in[a,b]} \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|$, da $\gamma_1 - \gamma_2$ stetig auf der beschränkten Menge [a,b] ist.
Rechne nun die Metrikeigenschaften nach:

i) Symmetrie:

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \max_{t\in[a,b]} \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\| = \max_{t\in[a,b]} \|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)\| = d(\gamma_2, \gamma_1)$$

ii) Definitheit:

$$0 \leq d(\gamma_1, \gamma_2)$$
$$0 = d(\gamma_1, \gamma_2) = \max_{t \in [a,b]} \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\| \Leftrightarrow \gamma_1(t) - \gamma_2(t) = 0 \ \forall t \in [a,b] \Leftrightarrow \gamma_1(t) = \gamma_2(t) \ \forall \ t \in [a,b]$$

iii) Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d(\gamma_1, \gamma_3) = \max_{t \in [a,b]} \|\gamma_1(t) - \gamma_3(t)\| &\leq \max_{t \in [a,b]} (\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\| + \|\gamma_2(t) - \gamma_3(t)\|) \\ &\leq \max_{t \in [a,b]} \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\| + \max_{t \in [a,b]} \|\gamma_2(t) - \gamma_3(t)\| \\ &= d(\gamma_1, \gamma_2) + d(\gamma_2, \gamma_3) \end{aligned}$$

Bemerkung: Der Beweis gilt allgemein für Normen, d.h. hier wird keine Skalarproduktnorm vorausgesetzt!

Aufgabe 3.3 Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\gamma : I \to U$ eine Kurve.

Behauptung:
Es gilt $\frac{d\gamma}{dt}(t) = X(\gamma(t)) \ \forall t \in I$ genau dann, wenn $\gamma(t) - \gamma(t_0) = \int_{t_0}^t X(\gamma(s))ds$ für ein festes $t_0 \in I$ gilt.

Beweis. Durch bestimmte Integration von $\frac{d\gamma}{dt}(t) = X(\gamma(t))$ erhält man direkt nach dem Hauptsatz der Integral-und Differentialrechnung $\gamma(t) - \gamma(t_0) = \int_{t_0}^t X(\gamma(s))$ für ein festes $t_0 \in I$.
Durch Differentiation nach t von $\gamma(t) - \gamma(t_0) = \int_{t_0}^t X(\gamma(s))$ erhält man $\frac{d\gamma}{dt}(t) = X(\gamma(t))$. □

Aufgabe 3.4 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.
Behauptung: Jede lokal Lipschitz Stetige Funktion $f : U \to \mathbb{R}^n$ ist stetig.

Beweis. Seien $x_0 \in U$ und $\epsilon > 0$. Da f in x_0 Lipschitz Stetig ist gilt:

$$\exists \tau > 0 : \|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\| \ \ \forall x, y \in B_\tau(x_0),$$

wobei L die Lipschitzkonstante ist.

Für $\delta < \min\{\tau, \frac{\epsilon}{L}\}$ gilt dann

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq L \|x - x_0\| < L \cdot \frac{\epsilon}{L} = \epsilon \ \forall x \in B_\delta(x_0)$$

□

Warum muss U offen sein?

Was ändert sich bei einem Normwechsel?